Problem 1

情形(i): x≥0, y≥0, |x|+|y| = x+y = |x+y|;

情形(ii): x<0, y<0, |x|+|y| = -x-y = |x+y|;

情形(iii): x≥0, y<0, |x|+|y| = x-y

若x≥-y即x+y≥0, |x+y| = x+y, |x|+|y|-|x+y| = -2y≥0

若x≥-y即x+y<0, |x+y| = -x-y, |x|+|y|-|x+y| = 2x≥0;

情形(iv): x<0, y≥0, 遵循情形(iii)的推理过程，将x和y的角色互换;

|x|+|y|≥|x+y|对四种情形均成立, 包含了一切可能, 得出结论三角不等式成立.

Problem 2

不失一般性, 假定x为奇数, 则y为偶数, 存在整数m, n使x=2m+1, y=2n.

5x+5y = 5×(2m+1)+5×2n = 10m+10n+5 = 2×(5m+5n+2)+1

存在整数k=5m+5n+2使5x+5y = 2k+1, 则5x+5y是一个奇整数.

Problem 3

x, y为正实数, (x-y)² ≥ 0即x²-2xy+y² ≥ 0即x²+y² ≥ 2xy

2(x²+y²) ≥ x²+2xy+y² = (x+y)² > 0.

½(x²+y²) ≥ ¼(x+y)² > 0, √½(x²+y²) ≥ ½(x+y).

Problem 4

当|x|≥3时2x²≥18>14, 当|y|≥2时5y²≥20>14,

则x的可能取值为{-2, -1, 0, 1, 2}, y的可能取值为{-1, 0, 1}.

符合条件x²的最大值为4, y²的最大值为1,

2x²+5y²最大取值为13<14, 当x和y是整数时2x²+5y²=14不可能成立.

Problem 5

取任意一个有理数x与一个无理数y, 令z=½(x+y)则min(x, y)<z<max(x, y).

若z为有理数, y=2z-x为有理数, 与设定条件矛盾, z为无理数.

则任一个有理数和任一个无理数之间都有一个无理数.

Problem 6

当n≥5时n²+n³≥150>100, 则正整数n的取值集合为{1, 2, 3, 4}

其中n=4时n²+n³取得最大值为80<100, 故不存在这样的正整数n.

Problem 7

假设³√2是有理数, 存在整数x, y满足³√2=x/y, 其中y≠0且x, y无公因子.

等式两边取立方得2=x³/y³, 2y³=x³, 由偶数定义知x³为偶数, 则x为偶数,

存在整数z满足x=2z, 2y³=8z³, 即y³=4x³, y³为偶数, y为偶数.

则x, y有公因子2, 与设定条件矛盾, 故³√2是无理数.

Problem 8

a, b为无理数, 若ab/a^b为有理数, 存在整数x, y满足ya/x=b^1/(b-1)

其中x≠0且x, y无公因子, b≠1则b-1≠0.

y/x为有理数, 则ya/x为无理数, b^1/(b-1)为无理数.

设存在无理数b²=2, b=√2, b^1/(b-1)= (√2^√2)×√2.

1° 若√2^√2为有理数,令a=b=√2则ab/a^b=2/√2^√2为有理数.

2° 若√2^√2为无理数:

a. 若(√2^√2)×√2为有理数, 令a=√2^√2, b=√2,

则ab/a^b=(√2^√2)×√2/(√2^√2)^√2=(√2^√2)×√2/2为有理数.

b. 若(√2^√2)×√2为无理数, 即ya/x为无理数,

取有理数y/x=1, 无理数a=(√2^√2)×√2使ab/a^b=1为有理数.

综上所述, 存在无理数a, b使ab/a^b为有理数, “ab/a^b”为无理数是错误的.